

ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΛ 2025

Θέμα Α .

A₁ . Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

A₂ . Σχολικό βιβλίο σελίδα 143

A₃ . Σχολικό βιβλίο σελίδα 128-129

A₄ α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Λ

Θέμα Β

B₁. Είναι $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ επομένως το πεδίο ορισμού της της $\varphi = f \circ g$ είναι το $A = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in A_f\}$

δηλαδή $x \in \mathbb{R}$ με $e^x + 1 > 0$ πράγμα που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα

το πεδίο ορισμού της φ είναι το $A_\varphi = \mathbb{R}$ και ο τύπος της

$$\varphi(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x + 1) = \ln(e^x + 1)$$

B₂. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Leftrightarrow \ln(e^{x_1} + 1) = \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow$

$e^{x_1} + 1 = e^{x_2} + 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ οπότε η συνάρτηση φ είναι '1-1' δηλαδή αντιστρέψιμη

Αν y είναι τυχαία τιμή της φ τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $y = \varphi(x) \Leftrightarrow$

$$y = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^x + 1 = e^y \Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \quad (1) \text{ για να έχουμε λύση πρέπει } e^y - 1 > 0$$

δηλαδή $e^y > 1 \Leftrightarrow e^y > e^0 \Leftrightarrow y > 0$ επομένως το σύνολο τιμών της φ οπότε και το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το $(0, +\infty)$ η δε λύση της (1) είναι η $x = \ln(e^y - 1)$

και εναλλάσσοντας τα x και y βρίσκουμε ότι ο τύπος της φ^{-1} είναι ο

$$\varphi^{-1}(x) = \ln(e^x - 1) = h(x)$$

B₃. i) Για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) = (\ln(e^x - 1))' = \frac{1}{e^x - 1} (e^x - 1)' = \frac{e^x}{e^x - 1}$ και

επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > 0$ και $e^x - 1 > 0$ οπότε και $h'(x) > 0$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα

$$\begin{aligned} \text{ii) ακόμα } h''(x) &= \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x)'(e^x - 1) - (e^x - 1)'e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \\ &= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ επομένως η } h \text{ είναι κοίλη και δεν έχει} \\ &\text{σημεία καμπής} \end{aligned}$$

B₄.

Εξετάζω την ύπαρξη κατακόρυφων ασύμπτωτων

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(e^x - 1))$$

Θέτω $e^x - 1 = u$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0$ και κοντά στο 0^+ είναι $u > 0$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(e^x - 1)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$ άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

Οι πλάγιες - οριζόντιες αν υπάρχουν είναι ευθείες της μορφής $y = \lambda x + \beta$

$$\text{Εξετάζω τι γίνεται στο } +\infty, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(e^x - 1))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{Οπότε } \lambda = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 1) - x] = (+\infty) - (+\infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 1) - \ln e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^x - 1}{e^x} \right] \text{ θέτω } \frac{e^x - 1}{e^x} = u \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} u$$

Άρα $1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u$ συνεπώς $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^x - 1}{e^x} \right] = \lim_{u \rightarrow 1} [\ln u] = 0$ δηλαδή $\beta = 0$ επομένως η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Θέμα Γ .

Γ₁. Η εξίσωση της εφαπτομένης στην C_f στο σημείο $x_0 = 0$ είναι η

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \text{ και επειδή}$$

$$f(x) = a \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x \text{ άρα } f'(x) = a x^3 + 3x^2 + x + 1 \text{ είναι } f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 1$$

επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y - 0 = 1(x - 0)$ δηλαδή η $y = x$

Γ₂. Είναι $f''(x) = 3\alpha x^2 + 6x + 1$.

Για να είναι η f κυρτή στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει για κάθε x του $\mathbb{R}$ να είναι $f''(x) \geq 0$

πράγμα που συμβαίνει όταν $3\alpha > 0$ και $\Delta \leq 0$ δηλαδή $3\alpha > 0$ και $36 - 12\alpha \leq 0$

$\alpha > 0$ και $3 \leq \alpha$ οπότε η ελάχιστη τιμή του α είναι η $\alpha = 3$

Γ₃. Για $\alpha = 3$ είναι $f(x) = 3 \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x$ και $f'(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

Έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(3 \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x)$ θέτω $3 \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x = u$

Οπότε όταν $x \rightarrow 0$ τότε και $u \rightarrow 0$ επομένως το παραπάνω όριο γίνεται

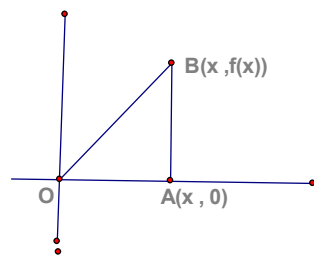
$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = 0 \text{ επίσης}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{3}{4}x^4 + x^3 + \frac{x^2}{2} + x - x\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{3}{4}x^4 + x^3 + \frac{x^2}{2}\right)$$

Πάλι αν $3 \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} = u$ τότε όταν $x \rightarrow 0$ τότε και $u \rightarrow 0$ επομένως το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x) - x) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(x) - x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Γ₄.



αφού $x > 0$ και $f(x(t)) > 0$

ως άθροισμα θετικών

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι

$$E(t) = \frac{1}{2} OA \cdot AB = \frac{1}{2} x(t) f(x(t)),$$

Και ο ρυθμός μεταβολής αυτού την χρονική στιγμή t είναι

$$E'(t) = \frac{1}{2} x'(t) f(x(t)) + \frac{1}{2} x(t) f'(x(t)) x'(t)$$

και επειδή την δεδομένη χρονική στιγμή είναι $x(t) = 2$ και $x'(t) = 2$ έχουμε

$$E'(t) = \frac{1}{2} 2 f(2) + \frac{1}{2} 2 f'(2) 2 = f(2) + 2 f'(2) = 24 + 78 = 102 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

Θέμα Δ.

Δ1. i) Είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \alpha x$ και $e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$

Έχουμε ότι $f(0) = 1$ και f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1}$ με $g(0) = e^{1-1} + 0 - \sqrt{0+1} = 0$

Η υπόθεση $e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$ γίνεται $g(x) \geq g(0)$ για κάθε x του $\mathbb{R}$

Τώρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 και παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 συνεπώς με βάση το θεώρημα του Fermat θα είναι και $g'(0) = 0$

Όμως $g'(x) = e^{f(x)-1} f'(x) + 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$ οπότε

$$g'(0) = e^{f(0)-1} f'(0) + 1 - 0 = 0 \text{ δηλαδή } f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = -1$$

ii) Τώρα $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} + \alpha$ οπότε $f'(0) = 0 + \alpha$ δηλαδή $-1 = \alpha$

Δ2. Είναι $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ δηλαδή $\sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$

Είναι $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$ για κάθε x του $\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Δ3. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται $F(3\eta\mu^2 x) - F(2\eta\mu^2 x) = F(2\eta\mu^2 x) - F(\eta\mu^2 x)$

Προφανείς ρίζες της εξίσωσης είναι η $x = 0$ και $x = \pi$ και αν $x \in (0, \pi)$ είναι $\eta\mu x \neq 0$

Προφανώς για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $\eta\mu^2 x < 2\eta\mu^2 x < 3\eta\mu^2 x$ επειδή δε η F είναι

Αρχική της f είναι $F'(x) = f(x)$

Η F είναι συνεχής στο $[\eta\mu^2 x, 2\eta\mu^2 x]$ και παραγωγίσιμη στο $(\eta\mu^2 x, 2\eta\mu^2 x)$

Επομένως με βάσει το ΘΜΤ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\eta\mu^2 x, 2\eta\mu^2 x)$ έτσι

$$\text{ώστε } F'(x_1) = \frac{F(2\eta\mu^2 x) - F(\eta\mu^2 x)}{2\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 x} = \frac{F(2\eta\mu^2 x) - F(\eta\mu^2 x)}{\eta\mu^2 x} = f(x_1)$$

Η F είναι συνεχής στο $[2\eta\mu^2 x, 3\eta\mu^2 x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2\eta\mu^2 x, 3\eta\mu^2 x)$

Επομένως με βάσει το ΘΜΤ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (2\eta\mu^2 x, 3\eta\mu^2 x)$ έτσι

$$\text{ώστε } F'(x_2) = \frac{F(3\eta\mu^2 x) - F(2\eta\mu^2 x)}{3\eta\mu^2 x - 2\eta\mu^2 x} = \frac{F(3\eta\mu^2 x) - F(2\eta\mu^2 x)}{\eta\mu^2 x} = f(x_2)$$

Αν $x_1 < x_2$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$ δηλαδή

$$\frac{F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} > \frac{F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} \text{ οπότε}$$

$F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x) < F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x)$ συνεπώς η εξίσωση

$F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x) = F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x)$ είναι αδύνατη στο $(0, \pi)$ οπότε μοναδικές ρίζες αυτής είναι η $x=0$ και $x = \pi$

Δ4. Αν $0 \leq x \leq 1$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε $f(0) \geq f(x) \Leftrightarrow 0 \geq f(x) \Leftrightarrow$

$0 \leq -f(x) \Leftrightarrow 1 \leq 1 - f(x)$ με το να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \geq 0$ είναι $\eta\mu x \leq x$ και επειδή $1 \leq 1 - f(x)$ είναι

$\eta\mu(1 - f(x)) \leq 1 - f(x)$ άρα $x\eta\mu(1 - f(x)) \leq x(1 - f(x))$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως $\int_0^1 x\eta\mu(1 - f(x))dx < \int_0^1 x(1 - f(x))dx$ (1)

όμως $\int_0^1 x(1 - f(x))dx = \int_0^1 x(1 - \sqrt{x^2 + 1} + x)dx$ και

$$\int_0^1 x(1 - \sqrt{x^2 + 1} + x)dx = \int_0^1 (x + x^2 - x\sqrt{x^2 + 1})dx = \int_0^1 xdx + \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}dx = \frac{5}{6} - \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}dx$$

Θέτω $x^2 + 1 = u$ οπότε $2xdx = du$ και αν $x = 0$ τότε $u = 1$ αν $x = 1$ τότε $u = 2$ συνεπώς

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u}du = \frac{1}{2} \int_1^2 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{1}{3} (2^{\frac{3}{2}} - 1) =$$

$$= \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1) \text{ οπότε } \int_0^1 (x - \sqrt{x^2 + 1} + x^2)dx = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1) = \frac{5 - 2(\sqrt{8} - 1)}{6} = \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Συνεπώς } \int_0^1 x\eta\mu(1 - f(x))dx < \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6}$$